Uniwersytet Warszawski
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

ul. Banacha 2 Tel: (48 22) 55 44 436
02-097 Warszawa, Polska Fax: (48 22) 55 44 300

Warszawa, 16.6.2013

prof. dr hab. Piotr Bogusław Mucha
e-mail:p.mucha@mimuw.edu.pl

Rada Wydziału Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr : Damiana Wiśniewskiego

"Boundary value problems

for elliptic second order equations

in unbounded cone-like domains"

Rozprawa doktorska pana mgra Damiana Wiśniewskiego analizuje rozwiązania równań eliptycznych w stożkowatych obszarach nieograniczonych. By lepiej oswoić się z problemem, doprecyzuję pojęcie rozważanych/dopuszczanych obszarów. Autor zakłada, iż obszar G jest sumą obszaru ograniczonego oraz nieograniczonej części stożka. Przyznam, szczerze, że nie znalazłem dokładnych założeń o dopuszczalnej geometrii obszaru ograniczonego, co może jest tak istotne. Chodzi mi tu głównie o własności Ω przekroju stożka. Autor zakłada jedynie, że brzeg obszaru jest gładki. Krótkie zadnie mogłoby rozwiać wszelkie wątpliwości. Na stronie 5 przedstawiony jest rysunek sugerujący, że G ma trywialną geometrię.

W rozprawie rozważane są trzy grupy problemów eliptycznych z podstawowymi warunkami brzegowymi. Są nimi:

* układ liniowy

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
&-\partial_{x^i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x) && \text{w} \quad G,\\
&\alpha(x)A(x)\nabla u \cdot n + \frac{1}{|x|}\gamma(\frac{x}{|x|})u = g(x) && \text{na} \quad \partial G,
\end{aligned}
$$

zakładając zanik rozwiązań w nieskończoności. α, γ określają rodzaj warunku brzegowego.

Założenia są następujące: a^{ij} jest macierzą jednostajnie eliptyczną dla wszystkich $x \in G$. Nadto autor zakłada, że $a^{ij} \to \delta^{ij}$ dla $x \to \infty$, innymi słowy w nieskończoności rozważane równanie staje się równaniem Laplacea. Funkcje b^i, g, f zanikają odpowiednio szybko w nieskończoności. Funkcja $c(x)$ ma stały znak, stabilizujący układ.

* układ słabo quasi-liniowy

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
&-\partial_{xi}(|u|^q a^{ij}(x) u_{x_j}) + b(x, u, \nabla u) = 0 && \text{w} \quad G,\\
&\alpha(x)|u|^q A(x)\nabla u \cdot n + \frac{1}{|x|}\gamma(\frac{x}{|x|})|u|^q u = g(x, u) && \text{na} \quad \partial G,
\end{aligned}
$$

zakładając zanik rozwiązań w nieskończoności oraz $q \geqslant 0$.

Tu autor zakłada następującą postać b:

$$|b(x, u, \nabla u)| \leqslant C(|u|^{q-1}|\nabla u|^2 + b_0(x))$$

dla odpowiednio szybko zanikającej funkcji b_0.

* układ quasi-liniowy

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
&-\partial_{xi}(a_i(x, u, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = 0 && \text{w} \quad G,\\
&\alpha(x)A(x, u, \nabla u) \cdot n + \frac{1}{|x|^{m-1}}\gamma(\frac{x}{|x|})|u|^{q+m-2}u = g(x, u) && \text{na} \quad \partial G,
\end{aligned}
$$

zakładając zanik rozwiązań w nieskończoności oraz $q \geqslant 0$, $m > 1$.

Tu założenia na strukturę są następujące

$$a_i(x, u, \xi)\xi_i \geqslant C(|u|^q|\xi|^m - z_0(x)),$$

$$|a_i| + |Da_i| \leqslant C(|u|^q|\xi|^m + z_1(x)).$$

Rozprawa liczy przeszło 110 stron, składa się z 7 rozdziałów oraz referencji.

Rozdział 1 wprowadza czytelnika w teorię, jest to profesjonalne przedstawienie obecnej wiedzy w tym temacie. Wprowadza również układy jakie są badane w rozprawie. To co nie jest wystarczająco uwypuklone to umiejscowienie otrzymanych wyników w istniejącej teorii. Brakuje *słownego* opisu głównych rezultatów oraz porównania ich do istniejących wyników, np. do własności rozwiązań dla zwykłego równania Laplacea. Pokazałoby to czytelnikowi, gdzie tkwią główne problemy. W części tej też jest wprowadzony obszar G, gdzie rozważane są równania – tu przydałaby się większa staranność.

Rozdział 2 wprowadza notację.

Rozdział 3 rozważa zagadnienia własne dla p-laplasjanu oraz dowodzi przeróżne nierówności między używanymi normami. Jest to bardzo dobry punkt doktoratu, gdyż pozwala czytelnikowi na pewną rozgrzewkę przed trudniejszymi rozważaniami. Jednocześnie w pewniej sposób definiuje używaną technikę. W rozdziale tym definiowane są również ważne współczynniki, określające zanik rozwiązań i innych ich własności.

Rozdział 4 jest pierwszą częścią prezentującą wyniki rozprawy, tyczy się on układu liniowego. Podrozdział 1 definiuje pojęcie słabego rozwiązania. To co jest dość nieoczekiwane to to, że słabe rozwiązanie musi być L_2 całkowalne. Dodatkowo też wymagane jest by było ciągłe, lecz to już tak nie jest rażące. Główne wyniki tego rozdziału opisane są przez Twierdzenia 4.3 oraz 4.4. Różnią się one założeniami o wymaganiu lub nie ciągłości w sensie Diniego (jak nazywa to autor) odległości, która opisuje jak blisko układ jest względem równania Laplacea. Brak tego założenia w drugim twierdzeniu osłabia nieco tezę charakteryzującą zanik rozwiązania w nieskończoności. Twierdzenia te pokazują zanik potęgowy dla rozwiązania, jego pochodnych oraz norm ważonych. Wykładnik zaniku λ_- zdefiniowany jest poprzez własności zagadnienia własnego dla równania Laplaca(Beltramiego) na wycinku Ω sfery $\mathbb{S}^{n-1}$, generującego stożek – nieograniczoną część obszaru G. To co jest ważne do podkreślenia, to to, że oszacowanie te zależą od L_2 norm w sposób jawny. Innymi słowy, na pierwszy rzut oka funkcja c powinna być odcięta od zera. Dowód twierdzeń bazuje na metodach energetycznych, metodzie Mosera oraz subtelnych oszacowaniach używających nierówności z Rozdziału 2. Tu widzi się duża sprawność rachunkową, wymagającą dużej wiedzy ale również i rutyny. Ostatni element dowodu to aplikacja klasycznej teorii maksymalnych oszacowań dla układów eliptycznych Agmona, Douglisa, Nirenberga w L_p przestrzeniach. Na końcu rozdziału 5 podane są przykłady, dają one pewien ogląd jak wygadają rozwiązania, choć, w tych przykładach c jest równe zero, a wzory na rozwiązania wcale nie przekonują, że w omawianej ogólności rozwiązania te są całkowalne z kwadratem, czyli nie pasują to dowodzonych twierdzeń. Brak jest wystarczających komentarzy tłumaczących taki wybór przykładów.

Rozdział 5 rozważa tzw. układy słabo quasi-liniowe. Jest to specjalna modyfikacje liniowego układu o czynnik $|u|^q$. Tu znów słabego rozwiązania są brane z przestrzeni L_2. Główny wynik to Twierdzenie 5.3 uogólnienie twierdzenia 4.3, w tym przypadku oszacowania zależą od normy $L_{2(q+1)}$. Metodologia dowodu, to pewne nietrywialne przełożenie argumentacji z poprzedniego rozdziału, autor używa tu jawnej postaci nieliniowości. Na końcu rozdziału znów badane są szczególne rozwiązania, przyznam się że są one ciekawe, jednak widoczny jest brak komentarzy: jak wskazane przykłady mają się do udowodnionych twierdzeń.

Rozdział 6 bada pełny quasi-linowy układ, tu słabe rozwiązania należą (wydaje się) do odpowiednich przestrzeni wagowych. Główne twierdzenie 6.3 opisuje zanik rozwiązań, struktura tego oszacowania na zanik jest bardzo skomplikowana, pogarsza to bardzo czytelność tego rezultatu. Pierwszy wynik pokazuje zasadę maksimum, czyli aprioryczne oszacowanie względem danych. Następnie używając wypracowanego aparatu dowodzone jest główne twierdzenie, dowód jest bardzo techniczny.

Rozdział 7 podaje trywialne nierówności, trochę nie pasuje do całości.

Podsumowując, autor otrzymał precyzują asymptotykę rozwiązań rozważanych równań. Wykazał się bardzo dobrym opanowaniem warsztatu zaawansowanych metod energetycznych, wykorzystując subtelne nierówności w przestrzeniach wagowych. Moja całościowa ocena jest jednoznacznie pozytywna. Warto podkreślić, że mimo bardzo technicznych rozważań, prezentacja dowodów jest (całkiem) czytelna. Wyniki rozprawy stanowią podstawę dwóch prac [8] oraz [51] – jedna z Promotorem.

Stwierdzam, że rozprawa spełnia wszystkie wymogi Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Wnoszę o dopuszczenie pana mgra Damiana Wiśniewskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Bogusław Mucha