THE X INTERNATIONAL CONFERENCE OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

„CONGRESSIO-MATHEMATICA”

Olsztyn, Poland 19 – 22.09.2024

Department of Complex Analysis
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
Sloneczna Street 54
10–710 Olsztyn
tel. 89 524 60 92

http://wmii.uwm.edu.pl/congressiomath

THE X INTERNATIONAL CONFERENCE OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

„CONGRESSIO-MATHEMATICA"

Olsztyn, Poland 19 – 22.09.2024

ORGANIZERS

Department of Complex Analysis
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
University of Warmia and Mazury in Olsztyn

Institute of Mathematics
University of Rzeszów

Faculty of Technical Physics, Information Technology and Applied Mathematics
Centre of Mathematics and Physics
Lodz University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering
Lublin University of Technology

Honorary Patronage of this year's conference:

the Rector
of the University of Warmia and Mazury in Olsztyn
Prof. dr hab. Jerzy PRZYBOROWSKI

the Rector
of the Technical University of Lodz
Prof. dr hab. inż. Krzysztof JÓŹWIK

Organizing Committee

Adam Lecko - Olsztyn (chairman)
Piotr Liczberski - Łódź (vice)
Paweł Zaprawa - Lublin (vice)

Mariusz Bodzioch - Olsztyn
Ihor Chyzhykov - Olsztyn
Radosław Cybulski - Olsztyn
Renata Długosz - Łódź
Anna Dobosz - Olsztyn
Lech Gruszecki - Lublin
Piotr Jastrzębski - Olsztyn
Aleksandra Kiślak-Malinowska - Olsztyn
Mikhail Kolev - Olsztyn
Bogumiła Kowalczyk - Olsztyn
Tomasz Krzywicki - Olsztyn
Kinga Lecko - Olsztyn
Millenia Lecko - Rzeszów
Jacek Marchwicki - Olsztyn
Anna Muranova - Olsztyn
Izabela Pawlicka - Olsztyn
Andrzej Poszwa - Olsztyn
Krzysztof Ropiak - Olsztyn
Jacek Szypulski - Olsztyn
Barbara Śmiarowska - Olsztyn
Tomasz Żmijewski - Olsztyn

Scientific Committee

Piotr Artiemjew - Olsztyn
Józef Banaś - Rzeszów
Jacek Chudziak - Rzeszów
Adam Doliwa - Olsztyn
Stanisław Domoradzki - Rzeszów
Jacek Dziok - Rzeszów
Marek Golasiński - Olsztyn
Lech Gruszecki - Lublin
Zbigniew J. Jakubowski - Łódź
Leopold Koczan - Lublin
Adam Lecko - Olsztyn
Piotr Liczberski - Łódź
Ołeh Łopuszański - Rzeszów
Maria Nowak - Lublin
Dariusz Partyka - Lublin
Janusz Sokół - Rzeszów
Hari M. Srivastava - Victoria (Kanada)
Jan Stankiewicz - Rzeszów
Zbigniew Suraj - Rzeszów
Ewa Swoboda - Rzeszów
Derek K. Thomas - Swansea (UK)
Aleksy Tralle - Olsztyn
Dov Bronisław Wajnryb - Rzeszów
Józef Zając - Chełm
Paweł Zaprawa - Lublin
Eligiusz Złotkiewicz - Lublin

CONFERENCE PROGRAM

Thursday, September 19th, 2024

***

13:00 – 16:00 Lunch

***

Plenary lectures

Chairman: ***Maria Nowak***

17:00 – 17:40 **Feliks Przytycki**: *Geometric pressure and periodic orbits for complex quadratic polynomials*

17:50 – 18:30 **Walter Bergweiler:** *André Bloch's "Principle of Topological Continuity"*

***

20:00 – 00:00 Welcome dinner

***

==

Friday, September 20th, 2024

Plenary lectures

Chairman: ***Feliks Przytycki***

09:00 – 09:40 **Maria Nowak**: *De Branges-Rovnyak spaces generated by nonextreme functions*

09:50 – 10:30 **Jouni Rättyä**: *Tent spaces and maximal theorems*

Chairman: ***Walter Bergweiler***

10:40 – 11:20 **Dariusz Partyka**: *Geometric properties of harmonic mappings in the unit disc and normalized on the boundary*

11:30 – 12:10 **Anbhu Swaminathan**: *Ratio of hypergeometric functions in Geometric Function Theory*

Chairman: ***Anbhu Swaminathan***

12:20 – 13:00 **Sanjeev Singh:** *Starlikeness of regular Coulomb wave functions*

***

13:00 – 14:00 Lunch

***

Section I – Complex analysis

Chairman: ***Sanjeev Singh***

14:00 – 14:25 **Adel Khalfallah**: *Norm estimates of the first partial derivatives of generalized harmonic functions*

14:30 – 14:55 **Navneet Lal Sharma**: *Estimates logarithmic coefficient inequalities for certain families of analytic functions*

15:00 – 15:25 **Kapil Jaglan**: *Area-minimizing minimal graphs over linearly accessible domains*

Section II – Functional analysis
(organizers: Leszek Olszowy, Rafał Nalepa)

Chairman: ***Tomasz Zając***

15:35 – 16:00 **Leszek Olszowy:** *Nieskończone układy nieliniowych równań całkowych*

16:05 – 16:30 **Agnieszka Dubiel**: *Rozwiązania równań całkowych Volterry–Stieltjesa w klasie funkcji zbieżnych w nieskończoności*

16:35 – 17:00 **Szymon Dudek**: *O pewnych przykładach i kontrprzykładach w teorii miar niezwartości*

Chairman: ***Leszek Olszowy***

17:05 – 17:30 **Tomasz Zając:** *Wokół twierdzeń Darbo i Sadowskiego w przypadku przestrzeni Banacha*

17:35 – 18:00 **Justyna Madej**: *Zastosowanie miar niezwartości do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych na przedziale nieograniczonym*

18:05 – 18:30 **Rafał Nalepa:** *Warunki zwartościowe w przestrzeniach funkcji o przyrostach utemperowanych modułem ciągłości*

Chairman: ***Szymon Głąb***

18:35 – 19:00 **Jacek Marchwicki:** *Achievement sets of complex series*

Section III – Didactics of mathematics
(organizers: Renata Długosz and Stanisław Domoradzki)

Chairman: ***Renata Długosz***

14:30 –14:55 **Ulyana Yarka:** *Efektywne strategie dydaktyczne prowadzenia zajęć z matematyki dla studentów z zaburzeniem uczenia się*

15:05– 15:30 **Karolina Mroczyńska**: *Znaczenie i poziom nauczania statystyki matematycznej polskiej młodzieży w wieku 15-21 lat*

15:40 – 16:05 **Anna Szpila**: *Kilka refleksji o wykorzystywaniu testów w nauczaniu matematyki na studiach inżynierskich w Uniwersytecie Rzeszowskim*

Chairman: ***Anna Szpila***

16:15 – 16:40 **Renata Długosz, Monika Lindner**: *Różnice między pokoleniami studentów Politechniki Łódzkiej*

16:50 – 17:15 **Renata Jurasińska**: *Aktywizacja studentów kierunku: Matematyka, specjalność: Nauczanie matematyki na warsztatach z przedmiotu: Geometria szkolna*

17:25 – 17:50 **Jacek Rogowski**: *On certain methods of finding finite sums from the lecturer's point of view*

***

20:00 – 00:00 Banquet

***

Saturday, September 21st, 2024

Plenary lectures

Chairman: ***Jouni Rättyä***

09:00 – 09:40 **Mark Elin**: *One family of analytic functions and the Gauß hypergeometric function*

09:50 – 10:30 **See Keong Lee**: *Logarithmic coefficients of analytic functions*

Chairman: ***See Keong Lee***

10:40 – 11:20 **Aleksander Denisiuk**: *Reconstruction in the cone-beam vector tomography with two sources*

11:30 – 12:10 **Matthias Keller**: *On Landis conjecture for Schrödinger operators on graphs*

Chairman: ***Piotr Artiemjew***

12:20 – 13:00 **Krzysztof Pancerz**: *Semantically-marked Petri net models of processes*

***

13:00 – 14:00 Lunch

***

Section IV – Computer science
(organizers: Piotr Artiemjew)

Chairman: ***Krzysztof Pancerz***

14:00 – 14:25 **Marek Kruk**: *Does SHAP-NET, the network of Shapley values, improve the explainability of machine learning models?*

14:30 – 14:55 **Krzysztof Ropiak, Paweł Drozda**: *System rekomendacji na bazie rekurencyjnej sieci neuronowej oraz collaborative filtering w usługach subskrypcyjnych*

15:00 – 15:25 **Paweł Drozda, Krzysztof Ropiak**: *Deep neural network classifier for images of recruitment advertisement expressed in declarative code*

15:30 – 15:55 **Viktoriia Onyshchenko**: *Gamification in Education of IT-Students*

Section V – Applied mathematics

Chairman: ***Mark Elin***

16:05 – 16:30 **Alicja Wolny-Dominiak:** *An application of two-stage regression for quantile premium estimation in automobile insurance*

16:35 – 17:00 **Michail Todorov, Meglena Lazarova**: *On a method for solving of nonlinear equations of mathematical physics in multidimension*

17:05 – 17:30 **Meglena Lazarova**: *Double Laplace transform applied to a non-ruin probability equation of third order arisen from insurance risk theory*

Section VI – Complex analysis

Chairman: ***Matthias Keller***

17:35 – 18:15 **Anna Muranova**: *Spectrum of a normalized complex laplacian on finite electrical networks*

18:20 – 18:45 **Ewa Ciechanowicz**: *Value distribution of solutions of certain ODEs*

Chairman: ***Piotr Liczberski***

18:50 – 19:15 **Liudmyla Vyhivska**: *The estimates of the inner radii of symmetric non-overlapping domains*

19:20 – 19:45 **Paweł Zaprawa**: *O współczynnikach funkcji odwrotnych do funkcji wypukłych*

Section VII – History of mathematics (organizers: Renata Długosz and Stanisław Domoradzki)

Chairman: ***Stanisław Domoradzki***

14:30 – 15:10 **Izabela Jóźwik, Małgorzata Terepeta**: *100th anniversary of Banach-Tarski Paradox*

15:20 – 15:45 **Jan Koroński**: *O egzaminach nauczycielskich dla kandydatów na nauczycieli matematyki i fizyki w gimnazjach i szkołach realnych na przykładzie Stanisława Kępińskiego i Kamila Krafta - nauczyciela Stefana Banacha*

15:55 – 16:20 **Paweł Perekietka**: *The Stodółkiewicz Arithmoscope. A teaching aid for narrative teaching of arithmetic*

Chairman: ***Jan Koroński***

16:30 – 17:10 **Stanisław Domoradzki**: *Rola Komisji Historii Matematyki przy ZG PTM w kształtowaniu środowiska historyków matematyki w Polsce*

17:20– 17:45 **Iryna Banakh, Olena Hryniv**: *Dr. Ada Halpern, an indomitable female mathematician from Lwów*

17:55 – 18:20 **Olena Hryniv, Iryna Mahdych:** *Wawrzyniec Żmurko (1824 – 1889)*

***

20:00 – 00:00 Barbecue

***

==

Sunday, September 22nd, 2024

Plenary lectures

Chairman: ***Michail Todorov***

09:00 – 09:40 **Sławomir Dinew**: *The distance function - old and new*

09:50 – 10:30 **Renata Długosz, Piotr Liczberski**: *Hankel determinants problem for Bavrinís holomorphic functions in* C^n

Chairman: ***Sławomir Dinew***

10:40 – 11:20 **Ivan Matychyn, Viktoriia Onyshchenko**: *Fractional-Order Systems*

11:30 – 12:10 **Szymon Głąb:** *The set of upper frequently hypercyclic points need not be* G_δ

12:20 – 12:45 ***Poster session***

***

13:00 – 14:00 Lunch

***

ABSTRACTS

Iryna BANAKH[1], Olena HRYNIV[2]
[1]*Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine* (Lviv, Ukraine)
[2]*Ivan Franko National University of Lviv* (Lviv, Ukraine)

Dr. Ada Halpern, an indomitable female mathematician from Lwów

Ada Halpern was one of the few female mathematicians, members of the Lwów branch of the Polish Mathematical Society. In 1939, her life and science prospects were interrupted by war and occupation. Despite everything, she managed to survive, overcome and contribute to science. We will present biographical information about Ada and discuss her scientific path and professional activity.

Walter BERGWEILER
Christian–Albrechts–Universität zu Kiel (Kiel, Germany)

André Bloch's "Principle of Topological Continuity".

About one hundred years ago, André Bloch wrote a paper consisting mainly of heuristic speculations based on two philosophical principles. One of them, which he called the principle of topological continuity, says that certain true statements remain true if one modifies the data from a metric point of view, but not from the topological point of view. Based on this principle he anticipated certain results which were later confirmed by Ahlfors using his theory of covering surfaces.

We give a discussion of Bloch's principle of topological continuity and prove a result predicted by Bloch on the basis of this principle.

The results are joint work with Alexandre Eremenko.

Ewa CIECHANOWICZ
University of Szczecin (Szczecin, Poland)

Value distribution of solutions of certain ODEs

Among main Painlevé equations $P_1 - P_6$, equations P_1, P_2, P_4, are particularly interesting from the value distribution theory point of view, as all their local solutions can be extended to functions meromorphic in $\mathbf{C}$. Distribution of values of solutions of P_1, P_2 and P_4 is already well described. (see, for instance, relevant papers by H. Schubart and H. Wittich, S. Shimomura, A. Hinkkanen and I. Laine or N. Steinmetz). The talk will concentrate on Painlevé equations S_1, S_2 and S_4, which belong to a group of so-called σ-equations [3]. This term refers to equations satisfied by the Hamiltonians of the main Painlevé equations. Similarly as in case of P_1, P_2 and P_4, all solutions of their σ-counterparts are also meromorphic in the whole complex plane. Therefore, it is possible to estimate their growth in terms of order, describe the sets of deficient values, asymptotic values, as well as the sets of deficient and asymptotic functions.

References

[1] E. Ciechanowicz, *Painlevé σ-equations S_1, S_2, S_4 and their value distribution*, Filomat **34:6** (2020), 1959–1973.
[2] E. Ciechanowicz, *A note on value distribution of solutions of certain second order ODEs*, Contemporary Mathematics **782** (2023), pp. 21–35.
[3] K. Okamoto, *Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. I*, Proc. Japan Acad. **56(A)** (1980), 264–268.

Aleksander DENISIUK

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn, Poland)

Reconstruction in the cone-beam vector tomography with two sources

Consider the problem of reconstruction of vector field from its X-ray transform, known for a family of rays, coming out from two given curves in $\mathbf{R}^3$. A new exact inversion formula and a filtered backprojection reconstruction algorithm will be presented.

Sławomir DINEW

Jagiellonian University (Kraków, Poland)

The distance function - old and new

The distance function is a classical object of study in geometric analysis. This said it is still an active object of research. In my talk I intend to describe some of its features and then discuss an application of the distance function in complex analysis of several variables.

Renata DŁUGOSZ, Piotr LICZBERSKI

Lodz University of Technology (Łódź, Poland)

Hankel determinants problem for Bavrin's holomorphic functions in $\mathbf{C}^n$

The aim of the lecture, is presentation certain generalization of the problem of Hankel determinant, introduced in [4] for the class $\mathcal{S}$ of univalent function of one variable and the Fekete-Szegö problem in a Bavrin family $\mathcal{H}(\mathcal{G},\mathbf{C})$ [1] of functions $f:\mathcal{G}\to\mathbf{C}$ holomorphic on bounded complete n-circular domains $\mathcal{G}\subset\mathbf{C}$ [2]. More specifically, we will give the optimal upper bound for the functional

$$\mu_{\mathcal{G}}\left(Q_{f,1}Q_{f,3}-(Q_{f,2})^2\right),$$

where $Q_{f,1},Q_{f,2},Q_{f,3}$ are the initial terms of the expansion into a series of homogeneous polynomials of a holomorphic function $f\in\mathcal{H}(\mathcal{G},\mathbf{C})$. Here $\mu_{\mathcal{G}}(Q_m)$ denotes the Minkowski balance of homogeneous polynomials $Q_m:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ (see [3]). Note that $\mu_{\mathcal{G}}(Q_m)$ generalizes the norm $\|Q_m\|$. We will also give some application of the above result to solve certain extreme problem for biholomorphic starlike mappings $F:\mathbf{B}^n\to\mathbf{C}^n$, where $\mathbf{B}^n$ denotes the open unit Euclidean ball in the space $\mathbf{C}^n$.

References

[1] I. I. Bavrin, *Classes of regular functions in the case of several complex variables and extreme problems in that classes*, Moskov Obl. Ped. Inst., Moscov (1976), 1–99 (in Russian).

[2] R. Długosz, P. Liczberski, *Some results of Fekete–Szegö type for Bavrin's families of holomorphic functions in* $\mathbf{C}^n$, Ann. Mat. Pura Appl. **200** (2021), 1841–1857.

[3] E. Leś-Bomba, P. Liczberski, *New properties of some families of holomorphic functions of several complex variables*, Demonstr. Math. **42** (2009), 491–503.

[4] Ch. Pommerenke, *On the coefficents and Hankel determinant of univalent functions*, J. Lond. Math. Soc. **41** (1966), 111–122.

Renata DŁUGOSZ, Monika LINDNER

Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej (Łódź, Poland)

Różnice między pokoleniami studentów Politechniki Łódzkiej

Profil studenta zmienia się wraz z upływem czasu, a każdy nowy rocznik wnosi na uczelnie swoje unikalne cechy i oczekiwania. Różnice między pokoleniami studentów są widoczne na wielu płaszczyznach, od stylu uczenia się po motywacje i wartości. Podczas prezentacji powiemy o różnicach współczesnych studentów Politechniki Łódzkiej od ich poprzedników oraz jak te różnice wpływają na kształcenie studentów. Powiemy o wyzwaniach jakie stoją przed współczesnymi studentami.

Stanisław DOMORADZKI

Institute of History, University of Rzeszów (Rzeszów, Poland)

Rola Komisji Historii Matematyki przy ZG PTM w kształtowaniu środowiska historyków matematyki w Polsce

The role of the Committee on the History of Mathematics at the Main Board of PMS in shaping the community of historians of mathematics in Poland

Komisja Historii Matematyki przy Zarządzie Głównym PTM została powołana w 1977 r. i funkcjonowała do roku 2011. Jej działalność jest niesłychanie istotna dla uformowania się profesjonalnego środowiska historyków matematyki w Polsce. Komisją kierowali: dr Zofia Pawlikowska-Brożek (1941-2023) w latach 1997-2000, zaś od r. 2000. do czasu jej zawieszenia w 2011 r. dr Witold Więsław (1944-2023). W referacie zostaną przypomniane wybrane fakty z działalności Komisji i ich znaczenie dla rozwoju historii matematyki Polsce.

Wybrane referencje:

Literatura

[1] S. Domoradzki, *Działalność Komisji Historii Matematyki przy Zarządzie Głównym Polskiego Towarzystwa Matematycznego w latach 1977–2000*, Studia Historiae Scientiarum **22** (2023), 509–540. https://doi.org/10.4467/2543702XSHS

[2] S. Domoradzki, *Z. Pawlikowska-Brożek (1941–2023). Wspomnienie*, Antiq. Math. **17** (2023), 53–67. Doi: 10.14708/am.v17i1.7055

[3] L. Maligranda, *XXXIV Konferencja z Historii Matematyki, Będlewo 2023*, Antiq. Math. **17** (2023), 249–255. Doi.: 10.14708/am.v17i1.7237

Paweł DROZDA[1], Krzysztof ROPIAK[1], Maciej OSOWSKI[2], Aleksandra KRASNODĘBSKA[2], Arkadiusz NOWACKI[2], Arkadiusz TALUN[2]

[1] *University of Warmia and Mazury in Olsztyn* (Olsztyn, Poland)
[2] *Emplocity S.A.* (Warsaw, Poland)

Deep neural network classifier for images of recruitment advertisement expressed in declarative code

We present an innovative approach to classifying recruitment advertisement images using deep neural networks and declarative code. Our system combines a hybrid discriminator consisting of a declarative code validator and a deep neural network for image classification. We utilize the AWD-LSTM architecture for processing declarative code and a multimodal neural network for generating semantic image descriptions. The system achieves an F1 score of 0.72 with a training time under 24 hours. We also present challenges related to generating and classifying advertising images and our solutions, including the use of generative networks and data balancing techniques.

Project:

This presentation concerns the promotion of the results of the project No POIR.01.01.01-00-0912/18-00, "Development of an automated system using artificial intelligence for multi-channel recruitment advertising and Real-Time-Bidding operations using recurrent neural networks and Generative Adversarial Networks", co-financed by the European Union.

Agnieszka DUBIEL

Politechnika Rzeszowska (Rzeszów, Poland)

Rozwiązania równań całkowych Volterry–Stieltjesa w klasie funkcji zbieżnych w nieskończoności

Celem wystąpienia jest przedstawienie wyników dotyczących rozwiązywalności nieliniowych równań całkowych typu Volterry-Stieltjesa w przestrzeni funkcji ciągłych i ograniczonych na półosi rzeczywistej.

W trakcie wystąpienia zostanie przeprowadzona dyskusja rozwiązalności dwóch typów równań całkowych.

(1) Równania całkowego typu Volterry-Stieltjesa w funkcyjnej przestrzeni Banacha $BC(\mathbf{R}_+)$ złożonej z funkcji rzeczywistych, określonych, ciągłych i ograniczonych na półosi $\mathbf{R}_+ := [0, +\infty)$ i unormowanych normą supremum tj. równania postaci

$$x(t) = a(t) + \int_0^t f\left(t, s, x(s)\right) \mathrm{d}_s g(t, s),$$

gdzie $t \in \mathbf{R}_+$, $g(t, s) = g : \Delta \to \mathbf{R}$ oraz $\Delta := \{(t, s) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} : 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

(2) Kwadratowego równania całkowego typu Volterry-Stieltjesa w funkcyjnej przestrzeni Banacha $BC(\mathbf{R}_+)$ będącego uogólnieniem równania (1) postaci

$$x(t) = a(t) + u\left(t, x(t)\right) \int_0^t f\left(t, s, x(s)\right) \mathrm{d}_s g(t, s),$$

gdzie $t \in \mathbf{R}_+$, $g(t, s) = g : \Delta \to \mathbf{R}$.

Szymon DUDEK

Politechnika Rzeszowska (Rzeszów, Poland)

O pewnych przykładach i kontrprzykładach w teorii miar niezwartości

Podczas referatu przedstawione zostaną pewne przykłady miar niezwartości oraz funkcji, które nimi nie są, choć mogłoby się wydawać, iż jest inaczej. Referat będzie miał charakter przeglądowy. Jego celem będzie usystematyzowanie i zebranie w całość zagadnienia, które w literaturze występuje w sposób rozproszony i sporadyczny lub w ogóle jest pomijane. Wspomnimy także o błędach występujących w literaturze. Poruszać będziemy się w wybranych funkcyjnych przestrzeniach Banacha i Frécheta.

Jacek DZIOK

University of Rzeszów (Rzeszów, Poland)

Generalizations of starlike functions

Generalizations of convex and starlike functions are an essential part of the Geometric Theory of Analytic Functions. The ideas related to subordination, convolution, special functions, linear operators, correlated coefficients, extreme points play important role in this subject. The main object of the talk is to use these tools to generalize and study starlike functions on the space of meromorphic harmonic functions.

Mark ELIN

Braude College of Engineering (Karmiel, Israel)

One family of analytic functions and the Gauß hypergeometric function

The main object of this talk is the two-parameter family of the classes $\mathfrak{A}_s^t,\ s \geq 0,\ t \in [0,1]$, consisting of functions that are holomorphic in the open unit disk $\mathbf{D}$, normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ and satisfy the inequality

$$\operatorname{Re}\left[(s-1)\frac{f(z)}{z} + f'(z)\right] \geq st, \quad z \in \mathbf{D} \setminus \{0\}.$$

This family was investigated from different points of view by several mathematicians. Analytic properties of these classes along their connection with dynamical systems and the semigroup theory are examined.

The most intriguing results appear when we focus on the structure of the whole family $\left\{\mathfrak{A}_s^t,\ s \geq 0, t \in [0,1]\right\}$ from the set-theoretic perspective. This insight motivates us to introduce a refined concept of quasi-infima and quasi-suprema, and to establish their complete description.

Unexpectedly, new properties of the Gauß hypergeometric function ${}_2F_1$ play a crucial role in our investigation.

The talk is based on joint works with F. Jacobzon.

Szymon GŁĄB

Lodz University of Technology (Łódź, Poland)

The set of upper frequently hypercyclic points need not be G_δ

Let X be a separable linear topological space. Fix a countable base (V_n) on X. An operator $T : X \to X$ is called upper frequently hypercyclic if there is $x \in X$ such that

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\{n : T^n x \in V_k\}|}{n} > 0$$

for every k. The point x is then called upper frequently hypercyclic for T, and the set of such points is denoted by $UFHC(T)$. In [2] Bonilla and Grosse-Erdmann asked if the set $UFHC(T)$ is always a G_δ. They proved it is residual. On the other hand Leonetti in [3] showed that it is a $G_{\delta\sigma\delta}$-set. We will show that for the classical Rolewicz's backward shift operator $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T(y_1, y_2, \dots) = 2(y_2, y_3, \dots)$ on ℓ_2, which by [1] is (upper) frequently hypercyclic, the set $UFHC(T)$ is not G_δ. The method we use comes from the descriptive set theory.

AMS Subject Classification: Primary: 46B87, 15A03; Secondary: 40A35, 46E15

Key Words and Phrases: upper frequently hypercyclic operator, Σ^0_3-hard set, Π^0_3-hard set.

References

[1] F. Bayart, S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 11, 5083–5117.

[2] A. Bonilla, K. G. Grosse-Erdmann, *Upper frequent hypercyclicity and related notions*, Rev. Mat. Complut. **31** (2018), 67–711.

[3] P. Leonetti, *Strong universality, recurrence, and analytic P-ideals in dynamical systems*, arXiv:2401.01131.

Olena HRYNIV, Iryna MAHDYCH

Ivan Franko National University of Lviv (Lviv, Ukraine)

Wawrzyniec Żmurko (1824 – 1889)

This year marks the 200th anniversary of the birth of Wawrzyniec Żmurko, a prominent Polish mathematician. Żmurko was the author of twenty-six works, including Wykłady Matematyki (Mathematical Lectures) and other textbooks. He studied at the Vienna University and Polytechnic School. In 1849, he published Beitrag zum Integralcalcul and subsequently earned his habilitation as an associate professor of higher mathematics at the Vienna Polytechnic. In 1851 he moved to Lwów, where he was appointed a professorship in Mathematics at the Polytechnical School, and later, he became a professor at Lwów University. Żmurko also contributed to developing mathematical tools for curve drawings. At an industrial exhibition in Paris in 1878, he demonstrated an integrator – a device for graphically solving integral calculus problems.

KAPIL JAGLAN

Indian Institute of Technology Ropar (Rupnagar, Punjab, India)

Area-minimizing minimal graphs over linearly accessible domains

It is well-known that minimal surfaces over convex domains are always globally area-minimizing, which is not necessarily true for minimal surfaces over non-convex domains. Recently, M. Dorff, D. Halverson, and G. Lawlor proved that minimal surfaces over a bounded linearly accessible domain D of order β for some $\beta \in (0,1)$ must be globally area-minimizing, provided a certain geometric inequality is satisfied on the boundary of D. We prove sufficient conditions for a sense-preserving harmonic function $f = h + \overline{g}$ to be linearly accessible of order β. Then, we provide a method to construct harmonic polynomials which maps the open unit disk $|z| < 1$ onto a linearly accessible domain of order β. Using these harmonic polynomials, we construct one parameter families of globally area-minimizing minimal surfaces over non-convex domains.

REFERENCES

[1] M. Dorff, D. Halverson, G. Lawlor, *Area-minimizing minimal graphs over nonconvex domains*, Pacific J. Math. **210** (2003), no. 2, 229–259.

[2] K. Jaglan, A. S. Kaliraj, *Area-minimizing minimal graphs over linearly accessible domains*, J. Geom. Anal. **33** (2023), no. 10, Paper no. 321, 18 pp.

IZABELA JÓŹWIK, MAŁGORZATA TEREPETA

Lodz University of Technology (Łódź, Poland)

100th anniversary of Banach-Tarski Paradox

One of the most paradoxical consequences of the axiom of choice is the paradoxical distribution of the sphere. Two eminent Polish mathematicians, Stefan Banach and Alfred Tarski, published it, hence the name Banach-Tarski paradox. 100 years ago, in 1924, the article [1] was published in Fundamenta Mathematicae and it was their only joint work. They presented a theorem which can be formulated as follows:

> *The three-dimensional sphere K can be "cut" into a finite number of parts from which, using only translations and rotations, two spheres congruent to the sphere K can be assembled (equivalent to the sphere K by finite decomposition).*

The theorem is completely contrary to our intuition because, on the one hand, the volume of the sphere is doubled as a result of cutting, moving, rotating and folding and, on the other hand, the translation and rotation operations used are isometric, i.e., they preserve the volume of the solid.

The essence of the problem is that the parts into which the sphere is divided are not Lebesgue measurable, i.e., they have no volume. Hence the additivity of measure, according to which the sum of the measures of disjoint measurable sets is the measure of the sum set of these sets, cannot be applied to them.

In our talk we will present the history and some consequences of the Banach-Tarski paradox.

REFERENCES

[1] S. Banach, A. Tarski *Sur la decómposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. **6** (1924), 244–277.
[2] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Monografie Matematyczne, Tom **27**, 1952.
[3] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985.
[4] L. M. Wapner, *The pea and the sun: A Mathematical Paradox*, A K Peters/CRC Press, 2005.

Renata JURASIŃSKA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów, Poland)

Aktywizacja studentów kierunku: Matematyka, specjalność: Nauczanie matematyki na warsztatach z przedmiotu: Geometria szkolna

Przedmiot Geometria szkolna jest realizowany na II i III roku studiów I stopnia (4 i 5 semestr). W 4 semestrze oprócz wykładów i ćwiczeń pojawiają się również zajęcia warsztatowe. Do współprowadzenia warsztatów zapraszam zwykle studentów, którzy często zaskakują mnie swoją kreatywnością. Podczas referatu opowiem o metodach aktywizacji studentów, a także o bardzo ciekawych zajęciach, które prowadzili sami studenci.

Matthias KELLER

University of Potsdam (Potsdam, Germany)

On Landis conjecture for Schrödinger operators on graphs

Landis conjecture is concerned with growth bounds for harmonic functions of Schrödinger operator whose potential in absolute value is bounded by one. We study this problem for real potentials and positive Schrödinger operators on general graphs and in the Euclidean lattice in particular.

This is joint work with Ujjal Das and Yehuda Pinchover.

Adel KHALFALLAH

King Fahd University of Petroleum and Minerals (Dhahran, KSA)

Norm estimates of the first partial derivatives of generalized harmonic functions

We investigate under what conditions on a boundary function F, being uniformly continuous on the unit circle, so that the first partial derivatives to its Poisson extension $P[F]$ are in Hardy or Bergman spaces in the unit disk.

Next, we consider the case of so-called α-harmonic functions : suppose $\alpha > -1$ and $1 \leq p \leq \infty$. Let $f = P_\alpha[F]$ be an α-harmonic mapping on $\mathbf{D}$ with the boundary F being absolute continuous and $\dot{F} \in L^p(0, 2\pi)$, where

$$\dot{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) := \frac{\mathrm{d}F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{d}\theta}.$$

We investigate the membership of f_z and $f_{\overline{z}}$ in the space $\mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbf{D})$, the generalized Hardy space. We prove that if $\alpha > 0$, then both f_z and $f_{\overline{z}}$ are in $\mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbf{D})$. If $\alpha < 0$, then f_z and $f_{\overline{z}} \in \mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbf{D})$ if and only if f is analytic. Where

$$P_\alpha(z) = \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{(1-z)(1-\overline{z})^{\alpha+1}}$$

is the *α-harmonic Poisson kernel* in $\mathbf{D}$.

References

[1] S.L. Chen, S. Ponnusamy, X. T. Wang, *Remarks on 'Norm estimates of the partial derivatives for harmonic mappings and harmonic quasiregular mappings'*, J. Geom. Anal. **31** (2021), 11051–11060.

[2] A. Khalfallah, M. Mateljević, *Norm estimates of the partial derivatives and Schwarz lemma for α-harmonic functions*, Complex Var. Elliptic Equ. **69** (2023), no. 7, 1182–1194.

[3] A. Khalfallah, M. Mateljević, *Estimates of Partial Derivatives for Harmonic Functions on the Unit Disc*, Comput. Methods Funct. Theory (2023)

[4] J. F. Zhu, *Norm estimates of the partial derivatives for harmonic mappings and harmonic quasiregular mappings*, J. Geom. Anal. **31** (2021), 5505–5525.

Jan KOROŃSKI

Politechnika Krakowska (Kraków, Poland)

O egzaminach nauczycielskich dla kandydatów na nauczycieli matematyki i fizyki w gimnazjach i szkołach realnych na przykładzie Stanisława Kępińskiego i Kamila Krafta - nauczyciela Stefana Banacha

Przedmiotem rozważań jest istota dydaktyki matematyki głównie w kontekście historycznym. Wydaje się, że istotą dydaktyki matematyki jest właśnie matematyka. Stąd też aby zapewnić odpowiednią formację i kompetencje nauczyciela matematyki trzeba zacząć od fundamentalnego pytania: co to jest matematyka, a dopiero potem formułować wymagania stawiane nauczycielom matematyki. Zdaniem autora prezentowanego opracowania matematykę najogólniej i krótko można określić jako zbiór definicji, twierdzeń i dowodów twierdzeń przeprowadzanych zgodnie z prawami logiki matematycznej oraz wzajemne relacje jakie istnieją między wyszczególnionymi powyżej kategoriami. Po analizie źródeł archiwalnych [1], [2] należy stwierdzić, że w minionych wiekach nasi poprzednicy trafnie wyczuwali istotę dydaktyki matematyki kładąc główny nacisk na merytoryczny aspekt przygotowania nauczyciela do wykonywania swego zawodu, co w praktyce egzekwowali poprzez egzamin nauczycielski po studiach matematycznych. Przytaczamy tu przykłady takich egzaminów nauczycielskich: wybitnego matematyka przełomu XIX i XX wieku Stanisława Kępińskiego, który zajmował się głównie równaniami różniczkowymi pracując najpierw w UJ i następnie w Politechnice Lwowskiej i nauczyciela gimnazjalnego Kamila Krafta, który w szczególności w IV gimnazjum w Krakowie uczył, jak się potem okazało, jednego z najwybitniejszych matematyków polskich XX wieku Stefana Banacha.

Źródła archiwalne

[1] Archiwum UJ, Teczka Państwowego Egzaminu Nauczycielskiego Stanisława Kępińskiego.

[2] Archiwum UJ, Teczka Państwowego Egzaminu Nauczycielskiego Kamila Krafta.

Marek KRUK

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn, Poland)

Does SHAP-NET, the network of Shapley values, improve the explainability of machine learning models?

The aim of this work is to find an effective combination of modelling based on the boosting technique and the Shapley value calculation with the practise of evaluating an undirected graph model. For this purpose, we created a XGBoost-SHAP regression model in which the target variable is the cyanobacteria concentration and the model variables consist of 20 environmental factors. Then two partial correlation based graphs were created. First, Preliminary Network containing all features (with target variable) with original records of parameters and second, named SHAP-NET, based on the Shapley values of the independent variables from the SHAP model. It seems that using new combining machine learning and network tools as SHAP-NET it will be possible to further improve the idea of explainability of models in the field of XAI (eXplainable Artificial Intelligence), and attempts to solve practical domain problems, as in this work, can contribute to progress in this area.

Meglena LAZAROVA[1], Michail TODOROV[2]

[1] *Technical University of Sofia* (Sofia, Bulgaria)
[2] *Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences* (Sofia, Bulgaria)

Double Laplace transform applied to a non-ruin probability equation of third order arisen from insurance risk theory

In this research we are interested in finding an analytic solution of a linear PDE of order three with constant coefficients that had been derived for the non-ruin probability in the case of exponentially distributed claims. The equation arises as a result of an investigation over the extended Bivariate Pólya-Aeppli process, which applications are mostly found in the insurance risk theory. By using of the double Laplace transform an operator equation for the given equation is obtained and solved explicitly with respect to the image. As soon as it is a rational function of two complex-valued parameters the original solution can be restored by using twice the Riemann-Melin formula. The refinement of this unique equation requires using the specialized tool of software package Mathematica.

Key Words and Phrases: bivariate Polya-Aeppli counting process, non-ruin probability, exponentially distributed claims.

Acknowledgments. The research work of Meglena Lazarova is supported by the Bulgarian National Science Fund under Project KP-06-M62/1 “Numerical deterministic, stochastic, machine and deep learning methods with applications in computational, quantitative, algorithmic finance, biomathematics, ecology and algebra” from 2022.

See Keong LEE

School of Mathematical Sciences, Universiti Sains Malaysia (Penang, Malaysia)

Logarithmic coefficients of analytic functions

The Bieberbach conjecture was proved by Louis de Branges in 1984 by proving Milin's conjecture. The Milin conjecture states that for any analytic univalent function, the following inequality holds:

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^k-\frac{1}{k}\right)\leq 0,\quad n=1,2,\ldots,$$

where γ_k's are the coefficients in the series expansion of

$$\log\frac{f(z)}{z}=2\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n z^n.$$

These coefficients γ_n are called the logarithmic coefficients. Since then, works have been done on determining the bound for the logarithmic coefficients of functions in several subclasses.

The development of the problem on determining the logarithmic coefficients will be explored. Some recent results will be discussed too.

Justyna MADEJ

Politechnika Rzeszowska (Rzeszów, Poland)

Zastosowanie miar niezwartości do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych na przedziale nieograniczonym

Podczas wystąpienia zostaną przedstawione wyniki dotyczące istnienia rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych Urysohna i Hemmersteina na przedziale nieograniczonym. Przedmiotem prezentacji będą twierdzenia dotyczące istnienia rozwiązań tych układów. Głównymi narzędziami wykorzystywanymi w dowodach tych twierdzeń jest pojęcie miary niezwartości oraz twierdzenia o punktach stałych Schaudera i Darbo. Rozważania prowadzone są w przestrzeniach Banacha złożonych z funkcji ograniczonych i ciągłych na dodatniej półosi rzeczywistej o wartościach w przestrzeniach Banacha c_0 i l_∞.

Literatura

[1] J. Banaś, J. Madej, *On solutions vanishing at infinity of infinite systems of quadratic Urysohn integral equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **63** (2024), 53–57.

[2] J. Banaś, J. Madej, *Asymptotically stable solutions of infinite systems of quadratic Hammerstein integral equations*, Symmetry **16** (2024), 107.

Jacek MARCHWICKI

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn, Poland)

Achievement sets of complex series

The purpose of talk is to introduce the notion of achievement set, that is the set of subsums of the series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, more precisely

$$E(x_n) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}} \right\} = \left\{ \sum_{n \in A} x_n : A \subset \mathbf{N} \right\}.$$

We also consider the sum range of the series

$$SR(x_n) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_\infty \right\}$$

We observe among others that for the achievement sets $E(x_n)$ of conditionally convergent complex series the following are possible.

- The intersection of $E(x_n)$ and $SR(x_n)$ could be a singleton and moreover we mention that it is always nonempty set;
- $E(x_n)$ can be a graph of function;
- $E(x_n)$ can be a dense set in $\mathbf{R}^2$ with an empty interior;
- $E(x_n)$ can be neither an F_σ nor a G_δ-set;
- $E(x_n)$ can be an open set not equal to the whole $\mathbf{R}^2$;

References

[1] A. Bartoszewicz, S. Głąb, J. Marchwicki, *Achievement sets of conditionally convergent series*, Colloq. Math. **152** (2018), 235–254.

[2] S. Głąb, J. Marchwicki, *Levy-Steinitz theorem and achievement sets of conditionally convergent series on the real plane*, J. Math. Anal. Appl. **459** (2018), no. 1, 476–489.

[3] J. Marchwicki, V. Vlasak, *Subsums of conditionally convergent series in finite dimensional spaces*, Filomat **32** (2018), no. 15, 5471–5479.

Ivan MATYCHYN, Viktoriia ONYSHCHENKO

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn, Poland)

Fractional-Order Systems

Fractional-order systems (FOS) are dynamical systems that can be modelled by fractional differential equations (FDEs) involving derivatives of non-integer order. FOS are useful in investigating memory effect and hereditary properties of various materials and processes.

Explicit solutions to linear systems of differential equations provide basis to perform stability analysis and to solve control problems. Analytical solutions of the linear systems of fractional differential equations with constant coefficients were derived in the paper [1] and then applied to solving control problems in [2, 3, 4]. Explicit solutions to linear systems of differential equations are usually expressed in terms of state transition matrix. In the case of FDEs with constant coefficients the state transition matrix can be represented using the matrix Mittag-Leffler function

[5]. In this paper, special attention is given to the numerical methods for computation of the matrix Mittag–Leffler function.

Meanwhile, a number of real-life systems and processes can be described by linear FDEs with variable coefficients. Linear differential equations with variable coefficients arise in a natural way when modeling RLC-circuits with variable capacitance or inductance. With the advent of electronic components like super-capacitors (also called ultracapacitors) and fractances, one should employ fractional differential equations for circuit models. This provides motivation for research on FDEs with variable coefficients and related control problems.

In the recent years a number of papers have been devoted to solutions of the systems of FDEs with variable coefficients and their control. In [6] explicit solutions for the linear systems of FDEs are obtained in terms of generalized Peano–Baker series. Linear systems of FDEs with variable coefficients and their state-transition matrices are also discussed in [7].

In this paper we present an overview of the recent advances in the study of the linear FOS. Initial value problems for linear systems of FDEs with both constant and variable coefficients involving different types of fractional derivatives are investigated. For these systems solution of initial-value problem is derived and time-optimal control problem is formulated. The optimal control problem is treated from convex-analytical viewpoint. Necessary and sufficient conditions for time-optimal control similar to that of Pontryagin's maximum principle are obtained.

Further, differential games described by the systems of linear FDEs with variable coefficients involving Riemann–Liouville and Caputo derivatives are also examined. The game problem is treated using the technique of set-valued maps and their selections. On the basis of the resolving functions method, sufficient conditions for the finite-time game termination from given initial states are derived [8].

FDEs on the whole axis involving the Liouville fractional derivative are dealt with separately. We establish existence and uniqueness of an explicit solution to this equation under a boundary condition inside the time interval. In proving the uniqueness we apply technique of integral transforms [9].

Another topic discussed in the paper is the use of FDEs in artificial intelligence. In particular, we touch upon the subject of the fractional-order Physics Informed Neural Networks [10].

References

[1] A. Chikrii, I. Matichin, *Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo, and Miller–Ross*, J. Autom. Inf. Sci. **40** (2008), no. 6, 1–11.

[2] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Time-optimal control of fractional-order linear systems*, Fract. Calc. Appl. Anal. **18** (2015), no. 3, 687–696.

[3] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *On time-optimal control of fractional-order systems*, J. Comp. Appl. Math. **339** (2018), 245–257.

[4] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Optimal control of linear systems of arbitrary fractional order*, Fract. Calc. Appl. Anal. **22** (2019), no. 1, 170–179.

[5] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Matrix Mittag–Leffler function in fractional systems and its computation*, Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci. **66** (2018), no. 4, 495–500.

[6] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Solution of linear fractional order systems with variable coefficients*, Fract. Calc. Appl. Anal. **23** (2020), no. 3, 753–763.

[7] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Time-optimal control of linear fractional systems with variable coefficients*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. **31** (2021), no. 3, 375–386.

[8] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Game-theoretical problems for fractional-order nonstationary systems*, Fract. Calc. Appl. Anal. **26** (2023), no. 3, 1031–1051.

[9] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Fractional differential equation on the whole axis involving Liouville derivative*, Fract. Calc. Appl. Anal. (2024), 1–9.

[10] M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis, *Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations* (2017); arXiv:1711.10561.

Karolina MROCZYŃSKA

Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy; Kazimierz Wielki University in Bydgoszcz (Bydgoszcz, Poland)

Znaczenie i poziom nauczania statystyki matematycznej polskiej młodzieży w wieku 15-21 lat

The importance and level of teaching mathematical statistics to Polish youth aged 15-21

Statystyka matematyczna jest ważną dziedziną nauki i techniki, a wykorzystanie statystyki jako klucza do podejmowania decyzji jest cechą współczesnej nauki i zarządzania. Szkoła jest pierwszym środowiskiem, gdzie teoretycznie i praktycznie można kształtować świadomość znaczenia statystyki we współczesnym świecie. Celem opracowania jest analiza zagadnień statystycznych występujących w szkolnych programach nauczania, arkuszach egzaminacyjnych i Olimpiadzie Statystycznej. Dodatkowym narzędziem badawczym jest wywiad przeprowadzony wśród nauczycieli, którego wyniki pozwoliły określić zakres i stopień rozumienia zagadnień statystycznych ze szczególnym naciskiem na ich odniesienie do życia codziennego oraz ich wpływ na kształtowanie przekonań i podejmowanie decyzji przez młodzież.

Słowa kluczowe: statystyka matematyczna, edukacja statystyczna, Olimpiada Statystyczna, świadomość, decyzyjność.

Mathematical statistics is an important field of science and technology, and using statistics as a key to decision-making is a feature of modern science and management. School is the first and most important environment where theoretically and practically it is possible to shape the awareness of the importance of statistics in the contemporary world. The aim of the study is to analyze statistical issues appearing in school curricula, examination papers and the Statistical Olympiad. An additional research tool is an interview conducted among teachers, the results of which allowed to determine the scope and degree of understanding of statistical issues with particular emphasis on their reference to everyday life and their impact on shaping beliefs and decision-making by young people.

Key Words and Phrases: mathematical statistics, statistical education, awareness, decision-making.

Anna MURANOVA

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn, Poland)

Spectrum of a normalized complex Laplacian on finite electrical networks

It is know, that weighted graphs can be considered as electrical networks with resistors (in this case weights are called *conductances*). We consider more general case of electrical networks with inductors, capacitors and resistors. Than a generalization of conductance is called *admittance* and it is a positive real rational function on complex parameter s. Usually $s \in \mathbf{C}$ with positive real part is considered. The Laplace operator and Dirichlet problem for it arise naturally from the problem of finding voltages in electrical network.

We estimate the spectrum of normalized Laplace operator of finite graphs, whose weights are positive real functions on complex parameter, lying in the right half-plane, and show the sharpness of our estimates. It is shown that eigenvalues lie in a larger region compared to the case of the real Laplacian. Moreover, we present an estimate from below for the first non-vanishing eigenvalue in modulus.

References

[1] A. Muranova, *On the notion of effective impedance*, Oper. Matrices **14** (2020), no. 3, 723–741.
[2] A. Muranova, R. Schippa, *Eigenvalues of the normalized complex Laplacian on finite electrical networks*, arXiv:https://arxiv.org/abs/2012.12759, December 2020.

Rafał NALEPA

Politechnika Rzeszowska (Rzeszów, Poland)

Warunki zwartościowe w przestrzeniach funkcji o przyrostach utemperowanych modułem ciągłości

W referacie przedstawimy warunki zwartościowe w przestrzeniach funkcji o przyrostach utemperowanych modułem ciągłości. Przedstawimy również zastosowanie tych warunków w konstrukcji miar niezwartości w tych przestrzeniach.

Irina NASKINOVA

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy (Sofia, Bulgaria)

On a new computational model of bacterial infection

The proposed talk is devoted to the description of a new mathematical model considering the interactions between bacterial infection and immune system. Diseases caused by bacteria can be very dangerous. Mathematical modeling can simulate the development of the disease and be used for prediction of its outcome. Overview of recent literature in this field is presented. Numerical scheme for finding approximate solution of the modeled problem is proposed and implemented. Results of simulations are presented and commented from a medical point of view.

Iveta NIKOLOVA

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy (Sofia, Bulgaria)

On the mathematical modeling of autoimmune diseases caused by viral infections

Mathematical modeling has various applications in medicine. In the present work using modeling approach the development of autoimmune diseases is studied. Preliminaries to the research area are provided. Medical and immunological information as well as theoretical foundations of recently applied models are presented. The proposed new mathematical model is described. Results of qualitative and quantitative analysis of the model are presented. Typical outcomes of autoimmune diseases are obtained for various choices of parameters of the proposed model.

Maria NOWAK

University of Maria Curie-Skłodowska (Lublin, Poland)

De Branges-Rovnyak spaces generated by nonextreme functions

Let H^2 denote the standard Hardy space on the unit disk $\mathbf{D}$ of the complex plain and let $\mathbf{T} = \partial\mathbf{D}$. It is known that the space H^2 can be also identified with a subspace of $L^2 = L^2(\mathbf{T})$. For a function $\varphi \in L^\infty = L^\infty(\mathbf{T})$ the Toeplitz operator T_φ on H^2 is given by $T_\varphi f = P(\varphi f)$, where P denotes the orthogonal projection from L^2 onto H^2.

For a function b in the unit ball of H^∞, the *de Branges-Rovnyak space* $\mathcal{H}(b)$ is the image of H^2 under the operator $(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}$ with the inner product given by

$$\langle (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} f, (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} g\rangle_b = \langle f, g\rangle_2, \quad (f, g \in (\ker(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2})^\perp),$$

where $\langle f, g\rangle_2$ denotes the inner product in H^2. It is known that, in the case b is an inner function,

$$\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2$$

is the so called model space.

In the case when the b is not an extreme point of the unit ball of H^∞ (equivalently, $\log(1-|b|^2)$ is integrable on $\mathbf{T}$) the structure of the space $\mathcal{H}(b)$ is much more complicated.

Let a denote the outer function a that has modulus $(1 - |b|^2)^{1/2}$ on $\mathbf{T}$. If $\mathcal{M}(a) = aH^2$, then $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{H}(b)$. We will discuss the orthogonal complement of $\mathcal{M}(a)$ in $\mathcal{H}(b)$ and cyclic vectors for the shift operator restricted to $\mathcal{H}(b)$.

Joint work with Bartosz Łanucha and Małgorzata Michalska

Mamoru NUNOKAWA[1], Janusz SOKÓŁ[2], Edyta TRYBUCKA[2]

[1] *University of Gunma* (Chiba, Japan)
[2] *University of Rzeszów* (Rzeszów, Poland)

On some univalence condition

In [2] Ozaki, Ono and Umezawa proved a result that if $f(z)$ is analytic and satisfies $f'(0) \neq 0$, $|f''(z)| < 1$ in $|z| < 1$, then $|f'(z) - 1| < 1$ and so, $f(z)$ is univalent in $|z| < 1$, because $\mathrm{Re}\{f'(z)\} > 0$ in $|z| < 1$ implies univalence by Noshiro-Warshawski Theorem.

We will show an another sufficient condition for univalence of $f(z)$ by applying a hypothesis for modulus of $\arg\{f''(z)\}$ in the unit disc.

References

[1] R. Jurasińska, M. Nunokawa, J. Sokół, *On some differential inequalities for multivalent starlike and convex functions*, Bull. Sci. Math. **161** (2020), Art. no. 102859.
[2] S. Ozaki, S. Ono, T. Umezawa, *On a general second order derivative*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku A **5**(124–127) (1956), 111–114.
[3] K. Noshiro, *On the theory of schlicht functions*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Jap. **2** (1934-35), no. 1, 129–135.
[4] M. Nunokawa, J. Sokół, *On the order of strong starlikeness and the radii of starlikeness for of some close-to-convex functions*, Anal. Math. Phys. **9** (2019), 2367–2378.
[5] Ch. Pommerenke, *On close-to-convex analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), no. 1, 176–186.
[6] M. O. Reade, *The coefficients of close-to-convex functions*, Duke Math. J. **23** (1956), 459–462.
[7] S. Warschawski, *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), 310–340.

Leszek OLSZOWY

Politechnika Rzeszowska (Rzeszów, Poland)

Nieskończone układy nieliniowych równań całkowych

W trakcie referatu zostaną omówione kryteria zwartościowe w pewnych funkcyjnych przestrzeniach Frechéta a także będą podane wygodne rachunkowo miary niezwartości w tychże przestrzeniach. Ponadto zostaną przedstawione wybrane twierdzenia o punktach stałych wyrażone w terminach miar niezwartości. Całość tej techniki, przydatnej przy badaniu rozwiązalności niektórych równań, będzie zaprezentowana na przykładzie pewnego nieskończonego układu równań całkowych.

Viktoriia ONYSHCHENKO

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn, Poland)

Gamification in Teaching IT-Students

Teaching mathematical disciplines requires new forms and new methods of working with students. This is especially true if we are talking about teaching computer science students. Depending on the methods of teaching the material, monologue lectures have been supplemented by information-problematic lectures and lectures-conversations. That is, the correct construction of the game form of learning increases the level of attention [1, 3]. And a teacher-controlled game and learning in action keep young people's attention longer than just an instruction to "do it because it's necessary". Today, games are one of the most effective forms of learning. Gamification includes [2]:

- *Points:*for achieving certain results or completing tasks.
- *Levels:* achieving new levels after gaining a certain number of points or fulfilling conditions.
- *Badges/rewards:* symbols of achievement that show success or progress.
- *Rankings:* comparing results between participants to create competition.
- *Challenges/missions:* clearly defined goals to complete that provide a path to a reward.

Gamification helps to make learning more interesting by adding competition, rewards, or interactive exercises, and increases learning effectiveness when combined with such forms of learning as

- Interactive learning: the use of self-paced learning tools, including videos, games, polls and virtual simulations. This makes learning more dynamic and engaging.
- Flipped classroom: In this methodology, students learn new material at home through videos or other resources, and during lectures, they do practical tasks, discuss and solve problems. This allows more time to be spent on interactivity.
- Project-based learning: Focusing on completing projects that allow students to learn material through practical application. This can include research, creating presentations, developing models, etc.
- Microlearning: Dividing learning material into smaller chunks that are easier to digest. These can be short video tutorials, interactive modules, or tips.

- Collaborative learning: Increasing the emphasis on students working together on assignments. This includes the use of online platforms for group projects, discussions, and collaborative problem solving.

The combination of these forms of work results in a motivated student who learns throughout the semester and has a deep level of knowledge at the end of the course.

References

[1] W. Glac, *Mózgowy zegar - jak mózg mierzy czas*, In: *Pierścienie Czasu*, Ed. Gorlak Zbigniew, Akademia Sztuk Pięknych w Gdańsku, Gdańsk, 2023.
[2] A. Gorączka, M. Protasiuk, *Gamification*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2020.
[3] P. Kallalas, (2024, July 11), Dlaczego tak szybko się uzależniamy? Dr Wojciech Glac: Nasz mózg przecenia teraźniejszość nad przyszłość. trojmiasto.pl.

Krzysztof PANCERZ

The John Paul II Catholic University of Lublin (Lublin, Poland)

Semantically-marked Petri net models of processes

We present a new model of Petri nets called Petri nets over ontological graphs which was introduced for the first time in [5]. Petri nets over ontological graphs enable us to model processes taking into account the semantics of their entities. In the new model of Petri nets, we benefit from both Petri nets which are a powerful graphical and formal tool used to describe structures and dynamics of real-life processes [3] and ontologies which specify the concepts and relationships among them comprising the vocabulary from real-life areas [2]. Petri nets over ontological graphs can be treated as the so-called high level Petri nets (cf. [1]). Such Petri nets enable us to obtain much more succinct and expressive descriptions than can be obtained by means of low level Petri nets (e.g., place-transition nets [4]). In the proposed approach, we intend to consider tokens marking Petri nets as entities placed in semantic spaces (represented by ontologies, especially, OWL ontologies). In general, Petri nets over ontological graphs can be used to describe structures and behaviors of business processes, reasoning processes, control processes, etc.

References

[1] *High-level Petri Nets: Theory and Application*, eds: K. Jensen,G. Rozenberg, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
[2] R. Neches, R. E. Fikes, T. Finin, T. R. Gruber, R. Patil, T. Senator, W. R. Swartout, *Enabling technology for knowledge sharing*, AI Magazine **12** (1991), no. 3, 36–56.
[3] C. A. Petri, *Kommunikation mit automaten*, Schriften des IIM nr. 2, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, 1962.
[4] W. Reisig, *Petri Nets: An Introduction*, Springer, Berlin, 1985.
[5] J. Szkoła, K. Pancerz., *Petri nets over ontological graphs: Conception and application for modelling tasks of robots*, In Lech Polkowski et al., editors, *Rough Sets*, vol. **10313** of *LNAI*, pp. 207–214; Springer International Publishing, Cham, 2017.

Dariusz PARTYKA

The John Paul II Catholic University of Lublin (Lublin, Poland)
The University College of Applied Sciences in Chełm (Chełm, Poland)

Geometric properties of harmonic mappings in the unit disc and normalized on the boundary

Given $n \in \mathbf{N}$ let $T_1, T_2, \ldots, T_n$ be closed arcs contained in the unit circle $\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, with positive length, total length 2π and covering $\mathbf{T}$. Write $\mathcal{F}$ for the class of all complex-valued harmonic functions F of the unit disc $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ into itself satisfying the following sectorial condition: For each $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ and for almost every $z \in T_k$ the radial limit of the function F at the point z belongs to the angular sector determined by the convex hull spanned by the zero and arc T_k. Another class $\mathcal{H}$ under consideration consists of all harmonic diffeomorphisms F of $\mathbf{D}$ onto itself satisfying the following classical boundary condition: For each $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ the radial limit of F at the point e_k is equal to e_k. Here $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ is a subset of $\mathbf{T}$ containing $n + 1$ points placed according to the positive orientation of $\mathbf{T}$. The talk is a survey of results on geometric properties for both classes.

The presented results were obtained in cooperation with Anna Futa and Józef Zając.

Paweł PEREKIETKA

Muzeum Matematyki Fundacji Zakłady Kórnickie (The Museum of Mathematics in Kórnik (MuMa)) (Kórnik, Poland)

The Stodółkiewicz Arithmoscope. A teaching aid for narrative teaching of arithmetic

In the early 1900s, Leon Stodółkiewicz (1845-1913), who had spent many years teaching at elementary schools in the Kielce Governorate (in Kielce and Warsaw), proposed an arithmetic board based on his idea, as a teaching aid for narrative teaching of arithmetic. It was designed to replace the Schoty, the Russian abacus used in schools, which Stodołkiewicz felt was better suited to accountants, but not children.

In my report, I'll present some parts of a demonstration lesson described in the Warsaw daily newspaper 'Dziennik Powszechny' in December 1905.

References

[1] A. Chromiński, *Zamiast „szczotów"*, Dziennik Powszechny **23** (1905), no. 265, 5.
[2] L. Stodołkiewicz, *Arifmoskop* [Arytmoskop], Warszawa, 1911.

Feliks PRZYTYCKI

Institute of Mathematics of Polish Academy of Sciences (Warsaw, Poland)

Geometric pressure and periodic orbits for complex quadratic polynomials

Hyperbolic Hausdorff dimension of Julia set $J(f)$ for a rational mapping f of degree at least 2 on the Riemann sphere is defined as supremum of Hausdorff dimensions of its invariant hyperbolic subsets (usually it is just Hausdorff dimension of Julia set itself). It is the first zero $t = t_0$ of the geometric pressure function $P(f, -t\log|f'|)$. There are various equivalent definitions of this pressure, e.g. variational. I will sketch the proof that it can be expressed via periodic trajectories in the case of quadratic polynomials, partially answering an old problem. The method I use is to show that there are not many periodic trajectories in bunches, using Milnor's Orbit Portraits for external arguments.

A special case is the question of how many periodic trajectories of any period can be entirely in arbitrarily small neighbourhood U of Cremer's fixed point x (or periodic trajectory). Cremer's means that the linear part of f at x is multiplication by $\mathrm{e}^{2\pi\alpha}$, so that f is not linearizable at x (that is α is fast approximated by its continued fraction convergents). I can answer the latter question for quadratic polynomials: For adequate U there is at most one periodic trajectory in U of minimal period n for each $n > 1$.

Jouni RÄTTYÄ

University of Eastern Finland (Joensuu, Finland)

Tent spaces and maximal theorems

We present results and open questions related to maximal theorems and tent spaces related to radial or non-radial doubling weights.

Jacek ROGOWSKI

Politechnika Łódzka (Łódź, Poland)

O pewnych metodach wyznaczania sum skończonych

Na zajęciach z matematyki dyskretnej lub analizy matematycznej często pojawia się potrzeba zaproponowania ciekawszych zadań bardziej zaawansowanym lub zainteresowanym przedmiotem studentom. Bogatym źródłem takich problemów są pytania o jawne postaci sum skończonych $\sum_{k=1}^{n} a_k$, gdzie (a_k) jest danym ciągiem. Tego typu zadania pojawiają się np. podczas analizy algorytmów w tych przypadkach, gdy nie wystarcza oszacowanie szybkości zmian sumy (w zależności od n) na podstawie twierdzenia o rekurencji uniwersalnej ([1]). Wydaje się, że w dostępnej literaturze najpełniejszy katalog metod wyznaczania wzoru na sumę skończoną można znaleźć w [2].

W moim referacie omówię wybrane metody znajdowania sum skończonych zwracając uwagę na zaobserwowane trudności, jakie maja studenci podczas prób ich stosowania. Skoncentruję się głównie na metodzie zaburzania, metodzie zastępowania sumy przez rekurencję oraz metodzie sumowania różnic. W przypadku dwóch pierwszych metod widoczna będzie ich praktyczna równoważność. Omawiane metody zilustrowane zostaną przykładami o różnym stopniu trudności. W szczególności zostanie pokazane, jak

- znaleźć sumy
$$\sum_{k=1}^{n} n^3, \quad \sum_{k=1}^{n} na^n,$$
gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą;
- dla ciągu Fibonacciego (F_n) znaleźć
$$\sum_{k=1}^{n} F_k, \quad \sum_{k=1}^{n} F_k^2;$$
- wykazać zbieżność szeregów
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n F_{n+1}}$$
oraz znaleźć ich sumy.

Literatura

[1] T. H. Cormen, Ch. E. Leiserson, R. L Rivest, C. Stein, *Wprowadzenie do algorytmów*, PWN, Warszawa, 2012.
[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa, 1998.

Krzysztof ROPIAK[1], Paweł DROZDA[1], Łukasz MOZALEWSKI[2], Mikołaj MAŁACZYŃSKI[2], Mateusz FRUKACZ[2]

[1] *University of Warmia and Mazury in Olsztyn* (Olsztyn, Poland)
[2] *Legimi S.A.* (Poznań, Poland)

System rekomendacji na bazie rekurencyjnej sieci neuronowej oraz collaborative filtering w usługach subskrypcyjnych

Systemy rekomendacji są elementem wielu współczesnych aplikacji będących łącznikiem między klientem a biznesem. Zaprezentowany przypadek użycia obejmuje usługę subskrypcyjną firmy Legimi S.A., która oferuje swoim klientom dostęp do bogatej liczby ebooków oraz audiobooków. Rekomendacje, które są prezentowane użytkownikom powinny być spersonalizowane i mogą często być efektem dość skomplikowanej analizy zarówno historii czytelniczej danego użytkownika jak i obecnej sytuacji na rynku wydawniczym. Te rekomendacje mogą również wynikać z innych czynników biznesowych, więc potrzebna jest dość duża elastyczność w tym podejściu. Zaprezentowane w pracy potencjalne rozwiązania przedstawiają pewne spektrum możliwego wykorzystania sieci rekurencyjnych, a w szczególności jej wariantu o nazwie encoder-decoder oraz ugruntowanego rozwiązania opartego o collaborative filtering. Wskazują także możliwe formy nakładania czynników biznesowych na wyniki modelu.

Jednym z najbardziej popularnych zastosowań modelu encoder-decoder jest tłumaczenie maszynowe, gdzie sekwencja w jednym języku jest przez encoder osadzana w wielowymiarowej przestrzeni wektorowej (enkodowana), a następnie jej wewnętrzna reprezentacja wraz z tłumaczeniem przekazywana jest do decodera. Cały proces polega na zbudowaniu jak najlepiej dopasowanej (w kontekście wartości funkcji straty) reprezentacji tych wektorów. W procesie inferencji na podstawie nowej sekwencji wejściowej model zwraca najbardziej prawdopodobną sekwencję wyjściową (rekurencyjnie element po elemencie) aż do zadanej maksymalnej długości.

Model eksperymentalny, który został zbudowany na bazie sieci encoder-decoder miał na celu sprawdzenie jego efektywności na wektorach, które zamiast zdań w języku naturalnym składają się z tokenów, które reprezentują wybrane elementy historii czytelniczej użytkowników. W procesie uczenia te sekwencje są odpowiednio dzielone na część treningową i testową, tak aby model mógł wyuczyć się istniejących schematów kolejnych książek do przeczytania na podstawie pewnego fragmentu historii czytelnictwa użytkowników.

Drugie opisane podejście, które zostało przebadane w kontekście jego potencjalnego wykorzystania bazuje na sprawdzonej metodzie o nazwie collaborative filtering. To rozwiązanie wykorzystuje najpierw istniejące informacje o użytkownikach i produktach oraz ich wybranych cechach np. ocenach użytkowników, do stworzenia macierzy user-item. Ten mechanizm zakłada, że podobne rekomendacje powinny być generowane dla użytkowników, którzy podobnie oceniają te same produkty, więc należą do tych samych grup w kontekście produktów, kategorii lub innych badanych cech. W ramach collaborative filtering możemy wyróżnić rekomendacje typu user-based lub item-based. Te macierze są z natury rzeczy macierzami rzadkimi co powoduje konieczność stosowania metod faktoryzacji macierzy lub SVD aby poprawić jakość generowanych rekomendacji.

W ramach przeprowadzonych eksperymentów zbadano również skuteczność predykcji ocen brakujących poprzez stworzenie klasyfikatora ocen bazującego na wybranych cechach czytelniczych, który nazywany jest również podejściem typu implicit feedback. W ramach tej części eksperymentalnej zbadano skuteczność collaborative filtering oraz modyfikacji w postaci implicit feedback z różnym doborem danych w celu poszukiwania optymalnego rozwiązania.

W pracach porównano wyniki dla różnych podejść będących podstawą budowy systemów rekomendacji. Zastosowano takie metody oceny rekomendacji jak map@k oraz precision@k. Ze względu na różnorodność podejść, z których wynikały różne zakresy potrzebnych danych, ich rozpiętość czasowa oraz w zakresie potrzebnych atrybutów, skupiono się także na kwestii niezbędnych procesów zasilających oraz aktualizujących dane.

Prowadzone prace odbywały się w ramach projektu nr POIR.01.01.01−00−1970/20 pt. „Opracowanie modeli analizy behawioralnej użytkowników z wykorzystaniem algorytmów sztucznej inteligencji w celu predykcji zachowań konsumenckich, rekomendacji produktów i automatyzacji procesów marketingowo−sprzedażowych w branży księgarskiej", współfinansowanego przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego w ramach Programu Operacyjnego Inteligentny Rozwój 2014−2020, Działanie 1.1: Projekty B+R przedsiębiorstw, Poddziałanie 1.1.1: Badania przemysłowe i prace rozwojowe realizowane przez przedsiębiorstwa. Projekt realizowany był w ramach konkursu Narodowego Centrum Badań i Rozwoju 6/1.1.1/2020 − Szybka Ścieżka.

Navneet Lal SHARMA

Gati Shakti Vishwavidyalaya Vadodara (Gujarat, India)

Estimates logarithmic coefficient inequalities for certain families of analytic functions

The family $\mathcal{S}$ consists of functions that are analytic and univalent in the unit disc $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ and of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbf{D}.$$

By the logarithmic coefficients of f in $\mathcal{S}$, one means the coefficients of the expansion

$$\log \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n, \quad z \in \mathbf{D}.$$

I. M. Milin proposed a system of inequalities for the logarithmic coefficients of the family $\mathcal{S}$. Among those inequalities, one that is well-known as the Milin conjecture, is the key result in proving the Bieberbach conjecture by L. de Branges in 1984. In this talk, we will establish the logarithmic coefficient inequalities for a general family of starlike functions which are described by a subordination relation. Then, several special cases are deduced, which include one that corrects earlier published result.

A joint work with S. K. Lee and R. M. Ali.

AMS Subject Classification: Primary: 30C45, 30C55

Key Words and Phrases: analytic, univalent, starlike function, convex function, logarithmic coefficient, subordination.

This talk is based on the following articles:

References

[1] N. L. Sharma, S. K. Lee, R. M. Ali, *Estimates logarithmic coefficient inequalities for certain families of analytic functions*, Comput. Methods Funct. Theory (2024), (accepted).

[2] S. Ponnusamy, N. L. Sharma, K.-J. Wirths, *Logarithmic coefficients problems in families related to starlike and convex functions*, J. Aust. Math. Soc. **109** (2020), no. 2, 230–249.

Sanjeev SINGH

Indian Institute of Technology Indore (Indore, Madhya Pradesh, India)

Starlikeness of regular Coulomb wave functions

In this talk, I will present some geometric properties of a class of analytic functions, which is defined from the J-fraction expansion of the ratio $zf'(z)/f(z)$. I will find the disk domain, which is mapped into a starlike domain by these functions. Moreover, I will present similar results for two different normalized forms of regular Coulomb wave functions and a normalized Bessel function of the first kind by using continued fractions expansions.

Stanislava STOILOVA

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy (Sofia, Bulgaria)

Symmetrisation of sequences in base b

The problem of symmetrisation of sequences constructed in arbitrary number system in base b was defined by Nathan Kirk in 2020. In this paper is shown a solution to this problem. Here is considered the possibility of lower bound of b-adic diaphony. The relationship between the b-adic diaphony of sequence ξ_N and the L_2 discrepancy of the symmetric sequence generated by ξ_N is made. Using the known Koksma‘s formula, the properties of the Walsh functions and the similar Proinov‘s techniques is proved the main result.

Anbhu SWAMINATHAN

Indian Institute of Technology Roorkee (Roorkee, India)

Ratio of hypergeometric functions in Geometric Function Theory

Extremal functions of many subclasses of univalent function theory have the hypergeometric type representation. Hence the role of hypergeometric functions in determining the theory of classes of univalent functions in well known. In this talk, the role of ratio of hypergeometric functions in determining certain properties of functions in subclasses of univalent functions will be underlined. The results leading further generalizations of ratio of hypergeometric functions will be discussed. Open problems and directions for future research will be outlined.

AMS Subject Classification: Primary: 30C45, 33C45, 42C05, 30C15, 15A24

Key Words and Phrases: univalent function, starlike function, convex function, hypergeometric functions, continued fraction.

References

[1] A. P. Acharya, *Univalence criteria for analytic funtions and applications to hypergeometric functions*, Ph.D Thesis, University of Würzburg, 1997.
[2] A. Baricz, A. Swaminathan, *Mapping properties of basic hypergeometric functions*, J. Class. Anal. **5** (2014), no. 2, 115–128.
[3] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer–Verlag, Berlin, 1983.
[4] B. Frideman, *Two theorems on Schlicht functions*, Duke Math. J. **13** (1946) 171–177.
[5] A. W. Goodman, *Univalent Functions*, Vol. I-II, Mariner Publishing Comp. Inc., Tampa, Florida, 1983.
[6] R. Küstner, *Mapping properties of hypergeometric functions and convolutions of starlike or convex functions of order α*, Comput. Methods Funct. Theory **2**(2002), no. 2, 597–610.
[7] E. Merkes, B. T. Scott, *Starlike hypergeometric functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 885–888.
[8] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Univalence of Gaussian and confluent hypergeoemtric functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1990), no. 2, 333–342.
[9] H. Silverman, *Starlike and convexity propeties for hypergeometric functions*, J. Math. Anal. Appl. **172** (1993), 574–581.
[10] A. Swaminathan, *Convexity of the Incomplete beta functions*, Integral Transforms Spec. Funct. **18** (2007), no. 7, 521–528.

Anna SZPILA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów, Poland)

Kilka refleksji o wykorzystywaniu testów w nauczaniu matematyki na studiach inzynierskich w Uniwersytecie Rzeszowskim

Testy stały się powszechnym narzędziem służącym do weryfikacji wiedzy na różnych poziomach edukacji. Można rozróżnić dwa rodzaje testów: testy końcowe i testy w trakcie uczenia sie (studiowania). Pierwsze z nich budzą wiele kontrowersji związanych z rzetelnością oceny, drugie moga znacznie pomóc w procesie kształcenia.

W trakcie referatu podziele się doświadczeniem związanym z konstrukcją i przeprowadzaniem testów sprawdzających znajomość i rozumienie pojęć matematycznych przez studentów studiów I stopnia na kierunkach: optometria, systemy diagnostyczne w medycynie oraz informatyka i ekonometria, realizowanych w Uniwersytecie Rzeszowskim. Wskażę zalety i wady testów cząstkowych zaplanowanych po każdym dziale materiału oraz ich wpływ na zdawalność egzaminu końcowego. Ponadto przedstawię, zaczerpnięte z ankiet studenckich, opinie dotyczące przedstawionego sposobu weryfikacji efektów uczenia się.

Michail TODOROV[1], Meglena LAZAROVA[2]

[1] *Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences* (Sofia, Bulgaria)
[2] *Technical University of Sofia* (Sofia, Bulgaria)

On a method for solving of nonlinear equations of mathematical physics in multidimension

We consider linear multidimensional evolutionary equations or the linear part of nonlinear ones. The complex structure and the presence of terms with different physical sense requires the coordinate splitting to be preceded by splitting by physical factors (processes). Dated 70s of 20th century the method is applied very successfully for solving of various problems in ecology, air and water pollution, diffusion, etc. In this paper we aim to demonstrate that the splitting by physical factors is also applicable and can be efficient for solving of nonlinear multidimensional evolutionary problems. The nonlinear term(s) are linearized by the so-called inner iteration. Without loosing of generality we pay attention to an initial-value problem of $(3{+}1)D$ equations of Schrodinger kind. The method is applied successfully for numerical solving of $(3{+}1)d$ Schrodinger equation with sign-variable group velocity as well for $(3+1)d$ amplitude equations (of envelope), when the propagation regimes of the light pulses may be ultra-short (femtosecond). The obtained results are reliable and give good predictions for the material quantities and dynamics of the light pulses.

Katarzyna TRĄBKA-WIĘCŁAW

Lublin University of Technology (Lublin, Poland)

Coefficient functionals for close-to-convex functions

Let $\mathcal{A}$ be the family of all functions analytic in the open unit disk $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ having the power series expansion

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbf{D}.$$

Coefficient problems of analytic functions have always been of the great interest to researchers. There are many papers in which the n-th coefficient a_n, the difference of the moduli of successive coefficients $|a_{n+1}| - |a_n|$, the Hankel determinants, the logarithmic coefficients or the coefficients of the inverse functions have been estimated in various subclasses of analytic functions.

In this paper we discuss the coefficient functionals in the class of close-to-convex functions.

Liudmyla VYHIVSKA

Wroclaw University of Science and Technology (Wroclaw, Poland)
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine (Kyiv, Ukraine)

The estimates of the inner radii of symmetric non-overlapping domains

Let $\mathbf{N}$ and $\mathbf{R}$ be the sets of natural and real numbers, respectively, $\mathbf{C}$ be the complex plane, $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ be the Riemann sphere, and $r(B, a)$ be the inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbf{C}}$ with respect to the point $a \in B$.

Consider the different non-overlapping domains $B_0, B_1, \ldots, B_n$ ($B_p \cap B_j = \emptyset$ for $p \neq j$, $p, j = \overline{0, n}$) such that $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbf{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbf{C}$, $k = \overline{1, n}$. Moreover domains $B_1, \ldots, B_n$ have symmetry with respect to unit circle, and for $\gamma \in (0, n]$ consider the value

$$I_n(\gamma) := r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k). \tag{1}$$

Problem (see [1]) *For any fixed $\gamma \in (0, n]$ to find the maximum of the functional* (1) *and to show that this maximum is reached for some configuration of the domains B_k and points a_k, $k = \overline{0, n}$, which has n-fold symmetry.*

This problem is one of the problems of the geometric function theory. The problem has a solution only if $\gamma \leqslant n$ as soon as $\gamma = n + \epsilon, \epsilon > 0$, the problem has no solution. Currently it still unsolved in general, only partial results are known (e.g., [2]).

The following theorem holds (proof see in [3]).

Theorem. *Let $n = \overline{4, 7}$, $1 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_4 = 1.6$, $\gamma_5 = 1.65$, $\gamma_6 = 1.7$, $\gamma_7 = 1.77$. Then for any different system of points $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ such that $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ and for any different system of non-overlapping domains $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ such that $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbf{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbf{C}$, $k = \overline{1, n}$, moreover domains $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ have symmetry with respect to unit circle, the following inequality holds*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\dfrac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \dfrac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Equality is attained if a_k and B_k, $k = \overline{0, n}$, are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

References

[1] V. N. Dubinin, *Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable*, Russ. Math. Surv. **49** (1994), no. 1, 1–79.

[2] A. K. Bakthin, G. P. Bakhtina, Yu. B. Zelinskii, *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis*, In Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2008.

[3] A. K. Bakthin, L. V. Vyhivska, *The problem of extremal decomposition of a complex plane with free poles on a circle*, J. Math. Sci. **260** (2022), no. 5, 630–650.

Alicja WOLNY-DOMINIAK

University of Economics in Katowice (Katowice, Poland)

An application of two-stage regression for quantile premium estimation in automobile insurance

In automobile insurance, an primary task is to determine appropriate insurance rates, a process known as insurance pricing. In recent years, this process has incorporated multivariate predictive modelling techniques, including classifications and regression. The aim is to calculate suitable insurance premiums for individual policies that accurately assess the risks associated with specific vehicles and drivers. While generalized linear models (GLMs) are currently the industry standard, they only provide estimates of the expected values of response variables, neglecting extreme claims or tail events. To address this limitation, a quantile premium approach may be considered, as it offers insights into the entire distribution of a given phenomenon. This study proposes a method for selecting between two models to estimate the quantile premium. Both models employ a two-stage modelling technique to estimate the quantile premium in cases where the independent variables are multicategorical factors. The proposed method utilizes a supervised learning procedure, with the leave-one-out cross-validation (LOOCV) algorithm employed for model training.

Ulyana Yarka

Politechnika Wrocławska (Wrocław, Poland)

Efektywne strategie dydaktyczne prowadzenia zajęć z matematyki dla studentów z zaburzeniem uczenia się

Zaburzenia uczenia się (learning disorders, LD) to ogólny termin opisujący konkretne rodzaje problemów z nauką – to mogą być trudności w uczeniu się i korzystaniu z pewnych umiejętności. Najczęściej dotknięte są umiejętności czytania, pisania, słuchania i mówienia. Do tej grupy zaburzeń należą problemy neurologiczne, w którym człowiek o normalnym potencjale intelektualnym napotyka trudności w nauce. Osoby z LD mają zazwyczaj przeciętną lub ponadprzeciętną intelegencję i często są utalentowane w naukach ścisłych, sztukach pięknych i innych kreatywnych mediach. Niektórzy z najbardziej utalentowanych, wpływowych ludzi w historii mieli LD, w tym Albert Einstein, Leonardo da Vinci, Thomas Edison, Winston Churchill. LD to termin ogólny obejmujący wiele rodzajów specyficznych zaburzeń uczenia się: dysleksja, dysgrafia, dyskalkulia, zaburzenia przetwarzania słuchowego, zaburzenia przetwarzania języka, niewerbalne zaburzenia uczenia się, deficyt percepcji wzrokowej, motoryki wzrokowej. Od studentów z LD oczekuje się opanowania treści z ogólnego programu nauczania. Dla takiej kategorii osób duży wpływ na osiągnięcia ma działanie nauczyciela. Udowodniono, że odpowiednie wsparcie przez nauczyciela, zróżnicowane nauczanie, korzystanie z technologii wspomagających maksymalnie poprawia efekty uczenia się.

Podamy niektóre najważniejsze wskazówki do prowadzenia wykładów dla studentów z zaburzeniem uczenia się:

- Posiadanie dokładnego planu wykładu
- Dostosowane do studentów tempo wykładu

- Podział tematów na części
- Używanie wizualnego i werbalnego podania informacji

Niektóre najważniejsze wskazówki do prowadzenia ćwiczeń dla studentów z zaburzeniem uczenia się:

- Zwracać uwagę na algorytmy i strategie rozwiązywania zadań
- Werbalne powtórzenie strategii i algorytmów poprzez studentów
- Nadzorowanie ćwiczeń aby zapobiec błędnym pojęciom i błędnym zasadom

Wszystkie osoby z trudnościami w uczeniu się (LD) powinni mieć możliwość korzystania z udogodnień nie tylko na wykładach i ćwiczeniach, a także w sytuacjach testowych.Niekorzystanie z udogodnień w takich sytuacjach mogą zaszkodzić studentom pokazać co na prawdę wiedzą.

Wniosek. *Praca z studentami z LD jest zarówno satysfakcjonująca, jak i wymagająca.Dostępnych jest wiele zasobów, które pomogą w opracowaniu, modyfikacji i dostosowań dydaktycznych.Techniki, które dobrze sprawdzają się w przypadku studentów z LD , mogą być równie skuteczne w przypadku studentów, którzy nie mają zaburzeń uczenia się.*

References

[1] S. Kahn, *Special needs and Talents in Science Learning*, Handbook of research in science education (2023), 325–358.

[2] F.Brigham, T. E.Sruggs, *Science Education and Students with Learning Disabilities*, Learning Disabilities Research and Practice **26** (2011), no. 4, 223–232.

[3] National Association of Special Education Teachers, *Report #6. Effective Teaching Strategies for Students with LD*, pp. 15; https://www.naset.org

Tomasz ZAJĄC

Politechnika Rzeszowska (Rzeszów, Poland)

Wokół twierdzeń Darbo i Sadowskiego w przypadku przestrzeni Banacha

Twierdzenia Darbo i Sadowskiego uogólniają twierdzenie Schaudera o punktach stałych i należą do klasycznych rezultatów analizy nieliniowej. W twierdzeniach tych (zarówno w sformułowaniach jak i w dowodach) istotną rolę odgrywają miary niezwartości. W referacie przypomnimy wybrane fakty związane z koncepcją miar niezwartości i omówimy kilka, otrzymanych ostatnio, uogólnień twierdzeń Darbo i Sadowskiego w przypadku przestrzeni Banacha.

Paweł ZAPRAWA

Lublin University of Technology (Lublin, Poland)

On the problem of inverse coefficients for convex functions

The main subject of interest of this talk is the problem of estimating $|A_9|$, which is the modulus of the ninth coefficient of the inverse of a convex function belonging to the class $\mathcal{K}$. It was shown almost 50 years ago that $|A_n|$, where $n \geq 10$, can exceed 1. On the other hand, it is known that $|A_n| \leq 1$ for n ranging from 2 to 8. Until now, the problem of finding a sharp bound of $|A_9|$ has been unsolved. We present a new approach to solving it. Some related problems are also formulated.

References

[1] D. A. Brannan, T. S. Taha, *On some classes of bi-univalent functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math. **31** (1986), 70–77.

[2] J. T. P. Campschroer, *Inverse Coefficients and Symmetrization of Univalent Functions*, Ph.D. Thesis, University of Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands, 1984.

[3] F. Carlson, *Sur les coefficients d'une fonction bornée dans le cercle unité*, Ark. Mat. Astr. Fys. **27A** (1940), 1–8.

[4] I. Efraimidis, *A generalization of Livingston's coefficient inequalities for functions with positive real part*, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016), 369–379.

[5] W. E. Kirwan, G. Schober, *Inverse coefficients for functions of bounded boundary rotation*, J. Anal. Math. **36** (1979), 167–178.

[6] R. J. Libera, E. J. Złotkiewicz, *Early coefficients of the inverse of a regular convex function*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), 225–230.

[7] R. J. Libera, E. J. Złotkiewicz, *The coefficients of the inverse of an odd convex function*, Rocky Mountain J. Math. **15** (1985), 677–683.

[8] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential Subordinations, Theory and Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[9] E. Strohhäcker, *Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen*, Math. Z. **37** (1933), 356–380.

[10] T. Sugawa, *On the ninth coefficient of the inverse of a convex function*, Mathematics **9** (2021), art. 706.

[11] P. Zaprawa, *On a coefficient inequality for Carathéodory functions*, Results Math. **79** (2024), 30.

LIST OF PARTICIPANTS

Molla Basir Ahamed
Jadavpur University, India
mbahamed.math@jadavpuruniversity.in

Iryna Banakh
Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, Ukraine
irynabanakh@gmail.com

Walter Bergweiler
University of Kiel, Germany
bergweiler@math.uni-kiel.de

Ewa Ciechanowicz
University of Szczecin, Poland
ewa.ciechanowicz@usz.edu.pl

Aleksander Denisiuk
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
denisiuk@matman.uwm.edu.pl

Sławomir Dinew
Jagiellonian University, Poland
slawomir.dinew@uj.edu.pl

Renata Długosz
Centre of Mathematics and Physics, Lodz University of Technology, Poland
renata.dlugosz@p.lodz.pl

Anna Dobosz
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
dobosz@uwm.edu.pl

Stanisław Domoradzki
University of Rzeszów, Poland
stanislawdomoradzki@gmail.com

Paweł Drozda
University of Warmia and Mazury, Poland
pdrozda@matman.uwm.edu.pl

Agnieszka Dubiel
Rzeszow University of Technology, Poland
adubiel@prz.edu.pl

Szymon Dudek
Rzeszow University of Technology, Poland
sdudek@prz.edu.pl

Jacek Dziok
University of Rzeszów, Poland
jdziok@ur.edu.pl

Mark Elin
Braude College of Engineering, Israel
mark_elin@braude.ac.il, mark.elin@gmail.com

Szymon Głąb
Lodz University of Technology, Poland
szymon.glab@p.lodz.pl

Wasim Ul Haq
Abbottabad University of Science and Technology, Pakistan
wasim474@hotmail.com

Olena Hryniv
Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine
ohryniv@gmail.com

Kapil Jaglan
Indian Institute of Technology Ropar, India
kapil.19maz0005@iitrpr.ac.in

Izabela Jóźwik
Lodz University of Technology, Poland
izabela.jozwik@p.lodz.pl

Renata Jurasińska
University of Rzeszów, Poland
rjurasinska@ur.edu.pl

Matthias Keller
University of Potsdam, Germany
matthias.keller@uni-potsdam.de

Adel Khalfallah
King Fahd University of Petroleum and Minerals (Dhahran), Saudi Arabia
adel.khelafallah@gmail.com

Jan Koroński
Cracow University of Technology, Poland
jan.koronski@gmail.com

Bogumiła Kowalczyk
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
b.kowalczyk@matman.uwm.edu.pl

Marek Kruk
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
mkruk@uwm.edu.pl

Meglena Lazarova
Technical University of Sofia, Bulgaria
meglena.laz@gmail.com

Adam Lecko
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
alecko@matman.uwm.edu.pl

See Keong Lee
Universiti Sains Malaysia, Malaysia
sklee@usm.my

Piotr Liczberski
Lodz University of Technology, Poland
piotr.liczberski@p.lodz.pl

Monika Lindner
Lodz University of Technology, Poland
mlindner@p.lodz.pl

Justyna Madej
Rzeszow University of Technology, Poland
j.scibisz@prz.edu.pl

Iryna Mahdych
Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine
i.magdych82@gmail.com

Jacek Marchwicki
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
marchewajaclaw@gmail.com

Ivan Matychyn
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
matychyn@matman.uwm.edu.pl

Karolina Mroczyńska
Kazimierz Wielki University, Poland
karolinamroczynska@gmail.com

Anna Muranova
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
anna.muranova@matman.uwm.edu.pl

Rafał Nalepa
Rzeszow University of Technology, Poland
r_nalepa@prz.edu.pl

Irina Naskinova
University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Bulgaria
naskinova@gmail.com

Iveta Nikolova
University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Bulgaria
iveta.nikolova@abv.bg

Maria Nowak
Maria Curie-Sklodowska University, Poland
maria.nowak@mail.umcs.pl

Leszek Olszowy
Rzeszow University of Technology, Poland
lolszowy@prz.edu.pl

Viktoriia Onyshchenko
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
viktoriia.onyshchenko@matman.uwm.edu.pl

Krzysztof Pancerz
The John Paul II Catholic University of Lublin, Poland
kpancerz@kul.pl

Dariusz Partyka
The John Paul II Catholic University of Lublin, Poland
dariusz.partyka@kul.pl

Paweł Perekietka
Museum of Mathematics. Zakłady Kórnickie Foundation, Poland
redaktor.muma@fzk.pl

Feliks Przytycki
Institute of Mathematics of Polish Academy of Sciences, Poland
feliksp@impan.pl

Jouni Rättyä
University of Eastern Finland, Finland
jouni.rattya@uef.fi

Jacek Rogowski
Technical University of Lodz, Poland
jacekrog@p.lodz.pl

Krzysztof Ropiak
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
kropiak@matman.uwm.edu.pl

Navneet Lal Sharma
Gati Shakti Vishwavidyalaya Vadodara, India
nlsharma@gsv.ac.in

Sanjeev Singh
Indian Institute of Technology Indore, India, India
snjvsngh@iiti.ac.in

Stanislava Stoilova
University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Bulgaria
stoilova_fte@uacg.bg

Anbhu Swaminathan
Indian Institute of Technology Roorkee, India
a.swaminathan@ma.iitr.ac.in

Anna Szpila
University of Rzeszów, Poland
aszpila@ur.edu.pl

Barbara Śmiarowska
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
b.smiarowska@matman.uwm.edu.pl

Małgorzata Terepeta
Lodz University of Technology, Poland
mmttrp@p.lodz.pl

Michail Todorov
Technical University of Sofia, Bulgaria
mditod@gmail.com

Katarzyna Trąbka-Więcław
Lublin University of Technology, Poland
k.trabka@pollub.pl

Edyta Trybucka
University of Rzeszów, Poland
etrybucka@ur.edu.pl

Liudmyla Vyhivska
Wroclaw University of Science and Technology, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine , Ukraine
liudmyla.vyhivska@pwr.edu.pl

Alicja Wolny-Dominiak
University of Economics in Katowice, Poland
alicja.wolny-dominiak@uekat.pl

Ulyana Yarka
Wrocław University of Science and Technology , Poland
ulyana.yarka@pwr.edu.pl

Tomasz Zając
Rzeszow University of Technology, Poland
tzajac@prz.edu.pl

Paweł Zaprawa
Lublin University of Technology, Poland
p.zaprawa@pollub.pl

Tomasz Żmijewski
University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
t.zmijewski@uwm.edu.pl